



COLEGIUL
NAȚIONAL
"ȘTEFAN CEL MARE"
SUCEAVA

**CONCURSUL
CENTRELOR
DE EXCELENȚĂ
DIN MOLDOVA
- 30 mai 2009 -**

**CENTRUL DE EXCELENȚĂ
PENTRU TINERI CAPABILI
DE PERFORMANȚĂ
- FILIALA SUCEAVA -**

Str. V. Alecsandri nr.3, 720001;
Tel. 0230/551342; 0230/551343;
e-mail: cn_stefan@yahoo.com

CLASA a XII-a

1. Fie a, b două elemente ale unui grup (G, \cdot) astfel încât $aba = b^2 a^{-1} b^2$ și $b^{3n-1} = e, n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Să se demonstreze că $ab = ba$ și $a^3 = b^3$.

2. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{\{x\}}{x^2} dx$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x .

3. Fie numerele reale k, a, b cu $k > \max(-a, -b)$. Calculați

$$\int_0^1 \frac{(k^2 - a^2)e^{ax} + (k^2 - b^2)e^{bx}}{(k+a)e^{ax} + (k+b)e^{bx}} dx.$$

4. (a) Să se rezolve ecuația $x^2 = \hat{1} \pmod{2009}$.

(b) Notăm cu $U(\mathbb{Z}_{2009})$ grupul elementelor inversabile ale inelului $(\mathbb{Z}_{2009}, +, \cdot)$; să se demonstreze că $U(\mathbb{Z}_{2009})$ nu este grup ciclic. Se poate eventual folosi $2009 = 41 \cdot 7^2$.

NOTĂ: Timpul efectiv de lucru este de trei ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.